LAHENDUSED 11.klass

1. *Vastus:* **12 minutit.**

Lahendus. Olgu vahemaa, mille läbimiseks Kaarlil kulub $1\frac{2}{3}$ minutit ja Tarmol $1\frac{1}{2}$ minutit, tähistatud tähega s.

Sellisel juhul on Kaarli kiirus $\frac{s}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}s$ ja Tarmo kiirus $\frac{s}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}s$.

Olgu x (*min*) aeg, mis kulub Tarmol Kaarlile järele jõudmiseks.
Sellistel eeldustel saame võrrandi:

$$\frac{3S}{5}\left(\frac{4}{3}+x\right)=\frac{2S}{3}x$$

$$\frac{4S}{5}+\frac{3Sx}{5}=\frac{2Sx}{3} \quad \Big| \quad :S \neq 0$$

$$\frac{4}{5}+\frac{3x}{5}=\frac{2x}{3} \quad \Big| \quad \cdot 15$$

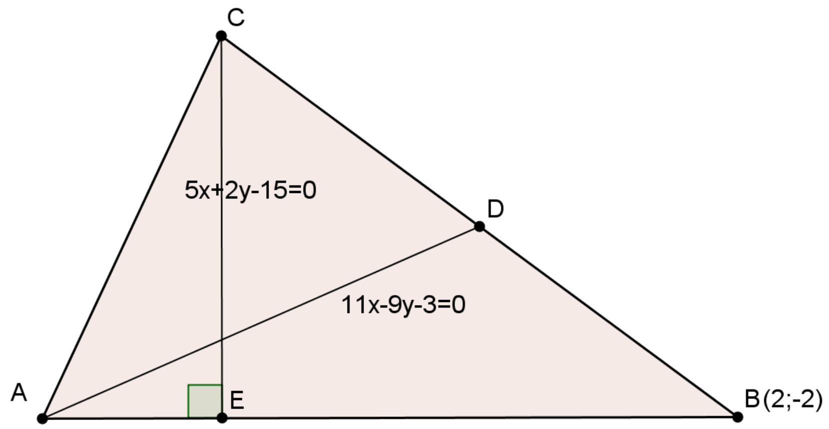
$$12+9x=10x$$

$$x=12$$

Tarmo jõuab Kaarlile järele 12 *min* pärast.

2. *Vastus:* $\boldsymbol{A(-3;-4)}$, $\boldsymbol{C(1;5)}$.

Lahendus. Teeme abistava joonis, millele kanname algandmed.



1) <u>Leiame tipust *C* tõmmatud kõrguse tõusu</u>.

$5x+2y-15=0 \Rightarrow 2y=-5x+15 \Rightarrow y=-2{,}5x+7{,}5 \Rightarrow$ kõrguse tõus on seega $-\frac{5}{2}$.

2) <u>Koostame külje *AB* võrrandi</u>.

Et ristuvate sirgete tõusude korrutis on -1, siis kolmnurga külje *AB* tõus on $\frac{2}{5}$. Külje võrrandi saame tõusu ja punkti $B(2;-2)$ abil:

$$y+2=\frac{2}{5}(x-2) \Rightarrow 2x-5y-14=0$$

3) <u>Leiame tipu *A* koordinaadid</u>.

Kuna tipp A on mediaani $11x-9y-3=0$ ja külje $2x-5y-14=0$ lõikepunkt, siis saame tema koordinaadid vastavast võrrandite süsteemist:

$$\begin{cases} 11x-9y-3=0 \\ 2x-5y-14=0 \end{cases} \Rightarrow x=-3 \text{ ja } y=-4 \Rightarrow A(-3;-4)$$

4) <u>Leiame tipu *C* koordinaadid</u>.

Kasutame asjaolu, et tipp *C* asub kõrgusel. Niisiis peavad tema koordinaadid rahuldama võrrandit $5x+2y-15=0$. Seega võime punkti koordinaatideks valida $C(m;-2{,}5m+7{,}5)$. Nüüd leiame külje *BC* keskpunkti:

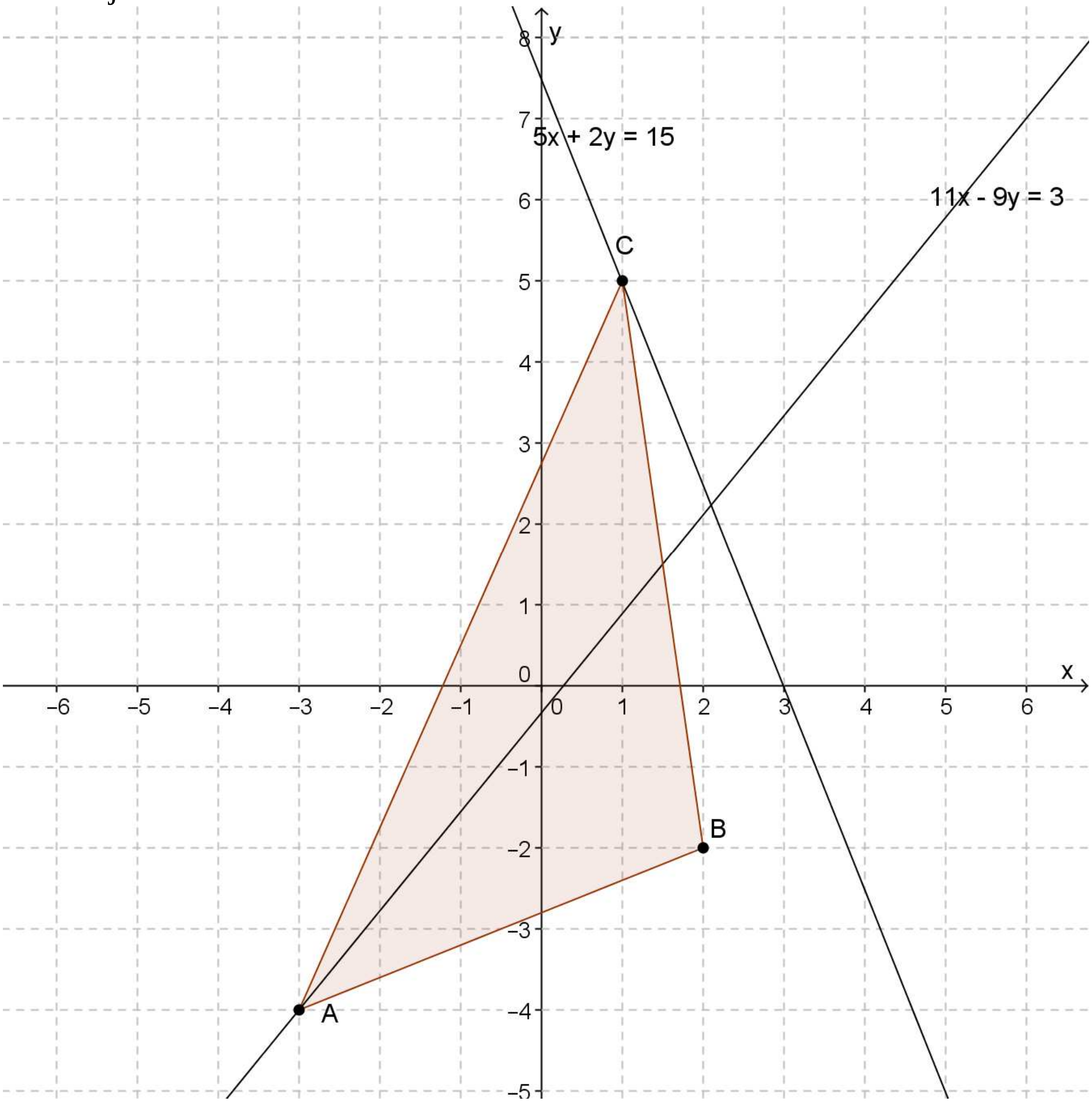
$$D\left(\frac{m+2}{2};\frac{-2{,}5m+7{,}5-2}{2}\right) \Rightarrow D(0{,}5m+1;-1{,}25m+2{,}75).$$

Et punkt D asub mediaanil $11x-9y-3=0$, siis saame võrrandi

$$11(0{,}5m+1)-9(-1{,}25m+2{,}75)-3=0$$
$$5{,}5m+11+11{,}25m-24{,}75-3=0$$
$$16{,}75m-16{,}75=0$$
$$m=1$$

Niisiis $C(1;5)$.

Lisame joonise.



3. *Vastus:* 1) $\boldsymbol{a=2}$, $\boldsymbol{b=4}$, $\boldsymbol{c=2}$, $\boldsymbol{d=2}$;
2) $\boldsymbol{a=2}$, $\boldsymbol{b=9}$, $\boldsymbol{c=2}$, $\boldsymbol{d=1}$;
3) $\boldsymbol{a=3}$, $\boldsymbol{b=4}$, $\boldsymbol{c=6}$, $\boldsymbol{d=7}$;
4) $\boldsymbol{a=3}$, $\boldsymbol{b=9}$, $\boldsymbol{c=6}$, $\boldsymbol{d=6}$.

Lahendus. Võrrandi $\overline{abc}+\overline{dba}=\overline{aa}^2$ vasakul poolel on kahe kolmekohalise arvu summa, mille minimaalne väärtus saab olla $100+100=200$ ning maksimaalne väärtus $999+999=1998$. Niisiis

$$200<\overline{abc}+\overline{dba}<2000$$

ning

$$200<\overline{aa}^2<2000.$$

Et $11^2=121$ ja $45^2=2025$, siis jääb numbri *a* valikuks vaid 3 võimalust: 2, 3 või 4. Uurime neid võimalusi.

1) Kui $a=4$, siis saame võrrandi

$$\overline{4bc}+\overline{db4}=44^2,$$

millest

$$\overline{4bc}+\overline{db4}=1936.$$

Et esimese kolmekohalise arvu sajaliste number on 4, siis peab ettenähtud summa saavutamiseks teine liidetav olema juba neljakohaline arv. Niisiis $a\neq 4$.

2) Kui $a=3$, siis saame võrrandi

$$\overline{3bc}+\overline{db3}=33^2,$$

millest

$$300+10b+c+100d+10b+3=1089$$
$$100d+20b+c=786.$$

Arvestades võrrandi paremat poolt saame kaks lahendit: $d=7$, $b=4$, $c=6$ või $d=6$, $b=9$, $c=6$.

3) Kui $a=2$, siis saame võrrandi

$$\overline{2bc}+\overline{db2}=22^2,$$

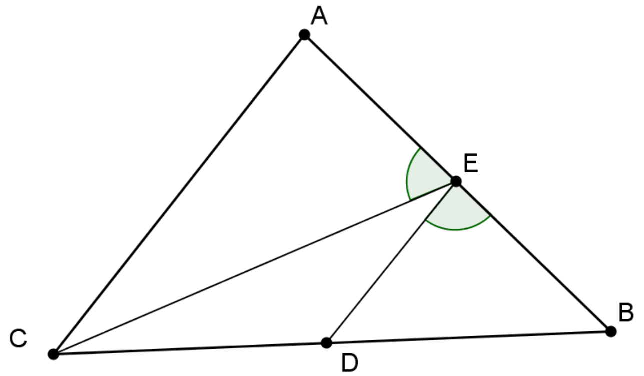
millest

$$200+10b+c+100d+10b+2=484$$
$$100d+20b+c=282.$$

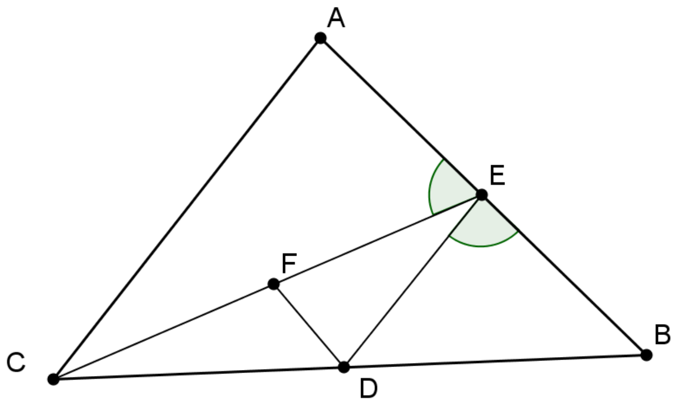
Arvestades võrrandi paremat poolt saame taas kaks lahendit: $d=2$, $b=4$, $c=2$ või $d=1$, $b=9$, $c=2$.

4. *Vastus:* **2 : 1.**

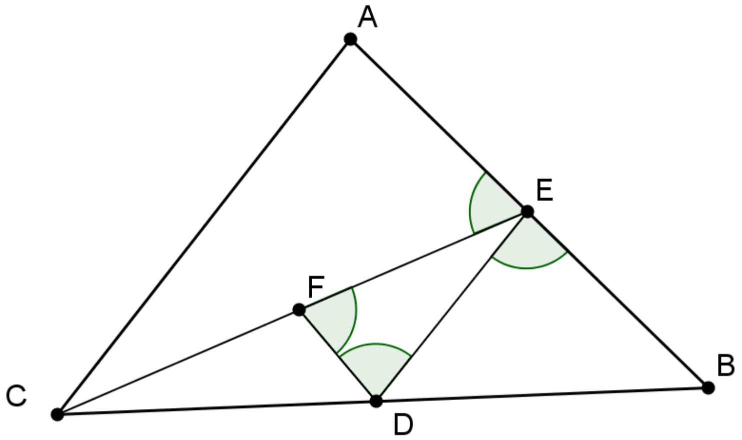
Lahendus 1. Teeme abistava joonise.



1) Tõmbame punktist D sirglõigu DF nii, et $DF \parallel AB$ ning punkt F asuks lõigul CE.

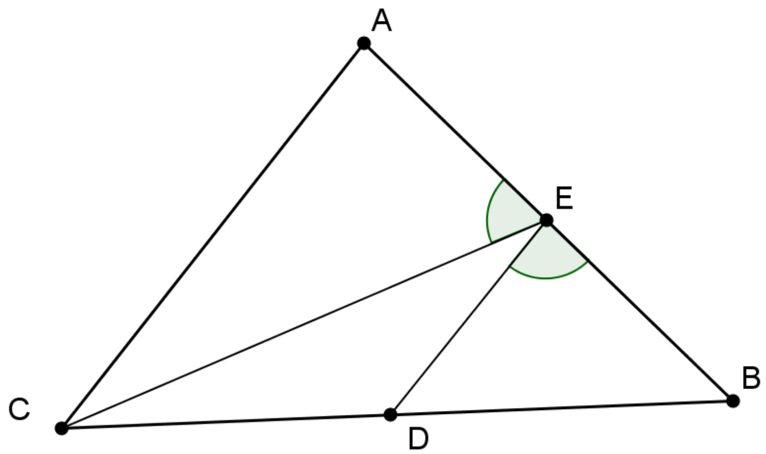


2) Kuna FD on osa kolmnurga ABC külgede BC ja AC vahelisest kesklõigust, siis $CF = FE$ ning $CE : FE = 2 : 1$.
3) Lisaks eelnevale $\angle DFE = \angle FEA$ ja $\angle BED = \angle FDE$, sest nad on paralleelsete sirgete lõikamisel kolmanda sirgega tekkinud põiknurgad.

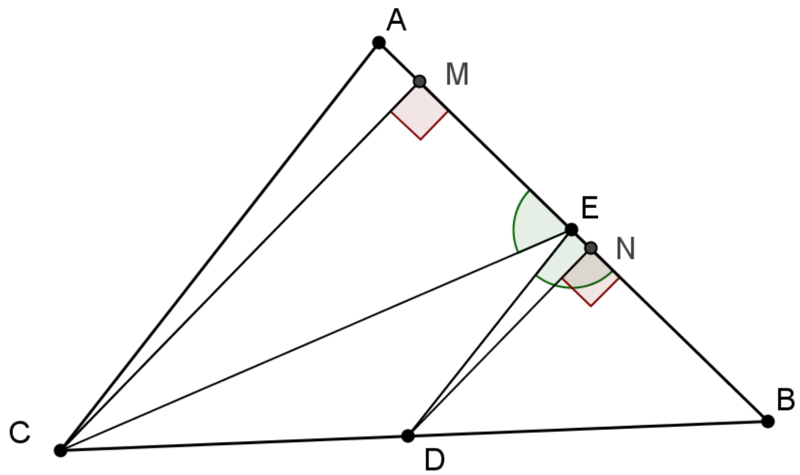


4) Niisiis on kolmnurk FED võrdhaarne ning $FE = DE$. Sellest aga $CE : DE = 2 : 1$.

Lahendus 2. Teeme abistava joonise.



1) Tõmbame kolmnurga *ABC* küljele *AB* ristsirged *CM* ja *DN*.



2) Vastavalt tunnusele *NN* on $\Delta CME \sim \Delta DNE$, millest $\frac{CE}{DE} = \frac{CM}{DN}$.

3) Vastavalt tunnusele *NN* on $\Delta CMB \sim \Delta DNB$, millest $\frac{CM}{DN} = \frac{CB}{DB}$. Et punkt *D* oli külje BC keskpunkt, siis saame punktidest 2 ja 3 kokku $\frac{CE}{DE} = \frac{CM}{DN} = \frac{CB}{DB} = 2$. Seega $CE : DE = 2:1$.

5. *Vastus:* **1568 inimest**.

Lahendus.

1) Leiame, mitu arvu jagub 5-ga: $2013:5=402{,}6$

Ehk 5-ga jagub 402 arvu.

2) Leiame, mitu arvu sisaldavad eneses lubamatut ühendit „13“. Võimalikud variandid on 13**, *13* ja **13.
   a) 13** - kolmas number võib olla ükskõik missugune, neljas – välja arvatud 5 ja 0 sobivad kõik ülejäänud. Kuna 5 ja 0-ga lõppevaid arve oleme juba arvestanud (jaguvad 5ga), siis saame $10\cdot 8=80$ arvu.
   b) *13***** - kui esimene number on 2 või suurem, siis on arv suurem kui 2013. Niisiis on esimese numbri valikuks 2 võimalust, viimase numbri jaoks 8. Kokku seega $2\cdot 8=16$.
   c) ******13 - kui esimene number 2 siis sobib vaid üks arv – 2013. Teiste arvude arv: esimese numbri valikuks 2 varianti, teise jaoks 10 varianti, kokku $1+2\cdot 10=21$.

Kui numbrit 7 mitte arvestada, siis peab ringist lahkuma
$402+80+21+16=519$ inimest.

3) Leiame selliste arvude arvu, mis sisaldavad numbrit 7. Meil on vaja vaadelda ainult neid arve, mille puhul inimene peab ringist lahkuma ehk arve, mis lõppevad numbriga 0 või 5 või mis sisaldavad ühendit „13“.
   a) Esimeseks ja viimaseks numbriks 7 antud juhul ei sobi.
   b) Kui 7 on teine number, siis on saame $2\cdot 1\cdot 9\cdot 2=36$ variant.
   c) Kui 7 on kolmas number, siis on saame $2\cdot 1\cdot 9\cdot 2=36$ variant.
   d) Kui 7 on teine ja kolmas number, siis on saame $2\cdot 1\cdot 1\cdot 2=4$ variant.
   e) Kokku on $36+36+4=76$ arvu, mis jaguvad 5-ga ning sisaldavad numbrit 7.
4) Leiame nende arvude arvu, mis jaguvad 5-ga ning sisaldavad numbrit 7 ning ühendit „13“. Kerge on veenduda, et selliseid arve on vaid 2: 1370 ja 1375.
5) Kokku saime $76-2=74$ arvu, mis võimaldavad ringi jääda ka 5-ga jaguva arvu ütlejal.

Kokku läheb ringist välja $519-74=445$ inimest.

Ringi jäi kokku $2013-445=1568$ inimest.

HINDAMINE

1. Kaarli kiiruse avaldamise eest 1p
   Tarmo kiiruse avaldamise eest 1p
   Võrrandi moodustamise eest 2p
   Võrrandi lahendamise eest 2p
   Õige vastuse eest 1p
   7p

2. Tipust *C* tõmmatud kõrguse tõusu leidmise eest 1p
   Külje *AB* võrrandi moodustamise eest 1p
   Tipu *A* koordinaatide leidmise eest 1p
   Tipu *C* koordinaatide leidmise eest 4p
   7p
   Märkus. Tipu *C* koordinaatide leidmisel võib lähtuda külje *BC* keskpunktist.

3. Kahe kolmekohalise arvu summa kohta tehtud järelduste eest 2p
   Võimaluse $a = 4$ uurimise ja õige järelduse eest 1p
   Võimaluse $a = 3$ uurimise ja lahendite eest 2p
   Võimaluse $a = 2$ uurimise ja lahendite eest 2p
   7p
   Märkus. Ülesande võib lahendada ka kõiki variante $a \in \{1;2;...;9\}$ kontrollides. Täieliku ja õige lahenduse eest anda igal juhul 7p. Kui õpilane jätab mõne lahenditest märkamata, siis iga puuduva lahendi eest -1p.

4. *1. lahendus*
   Lõigu *DF* konstrueerimise eest 1p
   Näidatud, et punkt F jagab lõigu CE pooleks, eest 1p
   Märgatud ja põhjendatud, et $\angle DFE = \angle FEA$, eest 2p
   Märgatud ja põhjendatud, et $\angle BED = \angle FDE$, eest 2p
   Õige vastuse eest 1p
   7p

   2. lahendus
   Küljele *AB* tõmmatud ristlõikude eest 1p
   Kolmnurkade *CME* ja *DNE* sarnasuse näitamise eest 1p
   Järelduse $CE : DE = CM : DN$ eest 2p
   Kolmnurkade *CMB* ja *DNB* sarnasuse näitamise eest 1p
   Eelneva abil õige vastuse tuletamise eest 2p
   7p

5. 5-ga jaguvate arvude arvu leidmise eest 1p
   Ühendit 13 sisaldavate arvude arvu leidmise eest 1p
   Eelneva kahe omadusega arvude seast numbrit 7 sisaldavate arvude arvu leidmise eest 3p
   Kolme omadusega arvude arvu leidmise eest 1p
   Õige vastuse eest 1p
   7p